

PROBABILIDAD. Curso 2015-2016. Convocatoria de Septiembre

TEORIA

1. (0.5 puntos) Dado el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{A}, P) y una sucesión de sucesos $\{A_n : n \geq 1\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, demostrar que $P(\overline{\lim} A_n) = 0$.

✓ 2 (0.5 puntos) Define el coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias e indica sus propiedades.

✓ 3 (0.5 puntos) Define la esperanza matemática de una variable aleatoria continua y demuestra que es un operador lineal. $E(\alpha g(x) + \beta h(x)) = \alpha E(g(x)) + \beta E(h(x))$

4. (1.25 puntos) Sean X e Y v.a.i.i.d. con función de distribución F y función de densidad f .

a) Sea $V = \max\{X, Y\}$. Demostrar que la función de densidad de V es $f_V(v) = 2f(v)F(v)$.

b) Sea $U = \min\{X, Y\}$. Demostrar que la función de densidad de U es $f_U(u) = 2f(u)(1 - F(u))$.

5. (1.25 puntos) Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias con $E[X_n] \rightarrow a$ y $Var[X_n] \rightarrow 0$. ¿Converge en probabilidad $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a alguna variable aleatoria?

PROBLEMAS

1. (2.0 puntos) Tres personas A, B, C lanzan sucesivamente y en este orden un dado. La primera persona que saque un 6 gana. Calcular la probabilidad de que:

a) Cada uno de ellos gane. $P(G_A)P(G_B)P(G_C) = 1 - (P(G_A) + P(G_B) + P(G_C))$

b) El juego acabe en la n -ésima ronda de lanzamientos.

2. (2.5 puntos) Sean X e Y v.a.i. con función de densidad marginales

$$f_X(x) = 2xI_{(0,1)}(x), \quad f_Y(y) = 2yI_{(0,1)}(y)$$

a) Evaluar la función de distribución de $Z = X + Y$.

b) Determinar la función de distribución conjunta de (Z, W) con $W = \min\{X, Y\}$.

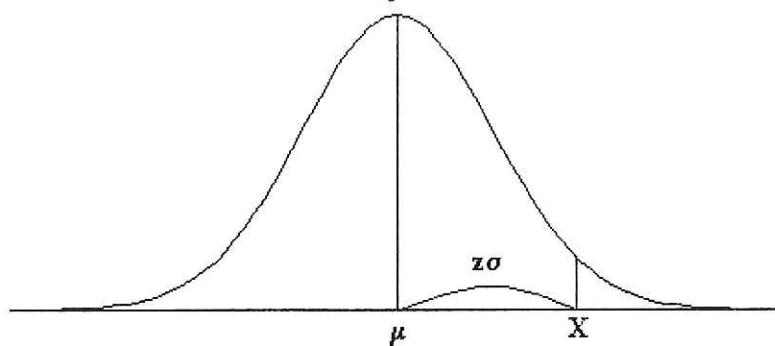
3. (1.5 puntos) En un juego, una persona observa una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \frac{x+1}{2} \quad x \in (-1, 1)$$

y cero en el resto. Si $X > 0$, gana una unidad y si $X < 0$ pierde dos unidades (Si $X = 0$ no gana ni pierda nada). El proceso se repite 100 veces. Se pide calcular aproximadamente la probabilidad de que dicha persona gane mas de 35 unidades.

TABLA 1: DISTRIBUCIÓN NORMAL

Áreas bajo la curva normal



Ejemplo:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$P[Z > 1] = 0.1587$$

$$P[Z > 1.96] = 0.0250$$

Desv. normal x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010